TRIANGLES ET PARALLELES

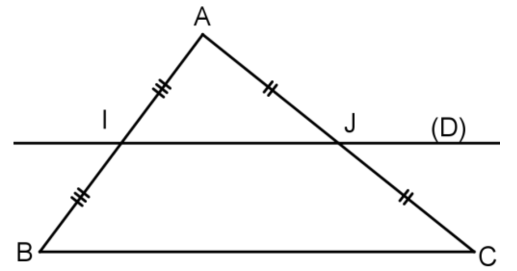
I. THEOREMES DES MILIEUX.

a. Premier théorème des milieux :

Dans un triangle,
SI une droite **passe par les milieux de deux côtés**,
ALORS
cette droite est parallèle au 3ème côté.

Remarque : On appelle souvent cette droite la « droite des milieux ».

hypothèses



conclusion

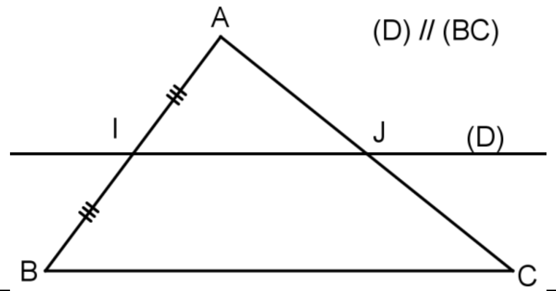
Si I milieu de [AB] et J milieu de [AC]

alors (D) // (BC)

b. Second théorème des milieux :

Dans un triangle,
SI une droite : - **est parallèle à un côté**
- **passe par le milieu d'un second côté**
ALORS
elle passe par le milieu du 3ème côté.

hypothèses



conclusion

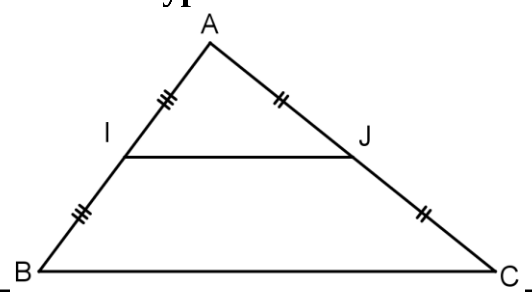
Si I milieu de [AB] et (D) // (BC)

Alors J est le milieu de [AC].

c. Troisième théorème des milieux :

Dans un triangle,
SI un segment **a pour extrêmités les milieux de deux côtés**,
ALORS
Sa longueur est égale à la moitié de celle du 3ème côté.

hypothèses



Conclusion

Si I milieu de [AB] et J milieu de [AC]

alors $IJ = \frac{1}{2} \times BC$

TRIANGLES ET PARALLELES

II. METHODE DE RESOLUTION : LE PRODUIT EN CROIX :

Nous aurons besoin d'une technique appelée le produit en croix pour résoudre des équations du style :

$$\frac{x}{3}=\frac{5}{6}.$$

« les produits des diagonales sont égaux », on commence par la diagonale contenant la variable (l'inconnue) :

→ On obtient $6\times x=5\times 3$ puis $\frac{6\times x}{6}=\frac{5\times 3}{6}$ soit $x=\frac{5}{2}$.

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\frac{7x}{5}=\frac{7}{10}$

$7x\times 10=7\times 5$

$70x=35$

$\frac{70x}{70}=\frac{35}{70}$

$x=\frac{35\times 1}{35\times 2}=\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{x}=\frac{6}{17}$

$x\times 6=17\times 3$

$6x=51$

$\frac{6x}{6}=\frac{51}{6}$

$x=\frac{17\times 3}{2\times 3}=\frac{17}{2}$

c) $\frac{4}{5}=\frac{2}{x}$

$x\times 4=5\times 2$

$4x=10$

$\frac{4x}{4}=\frac{10}{4}$

$x=\frac{2\times 5}{2\times 2}=\frac{5}{2}$

d) $\frac{9}{4}=\frac{x}{3}$

$x\times 4=9\times 3$

$4x=27$

$\frac{4x}{4}=\frac{27}{4}$

$x=\frac{27}{4}$

e) $\frac{3}{3+x}=\frac{5}{8}$

$5\times\ 3+x\ =3\times 8$

$15+5x=24$

$15+5x-15=24-15$

$5x=9$

$x=\frac{9}{5}$

III. « PETIT » THEOREME DE THALES :

PROPRIETE :

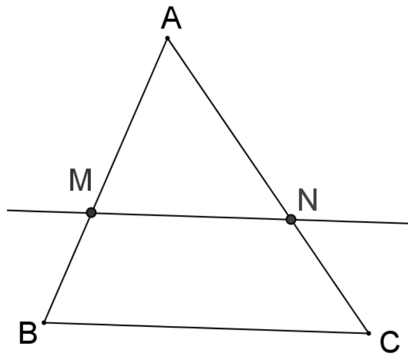
Dans un triangle ABC

SI :

- M est un point de [AB]
- N est un point de [AC]
- (MN) est parallèle à (BC)

ALORS : $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}}=\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}=\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{BC}}$

(les longueurs des côtés sont proportionnelles)

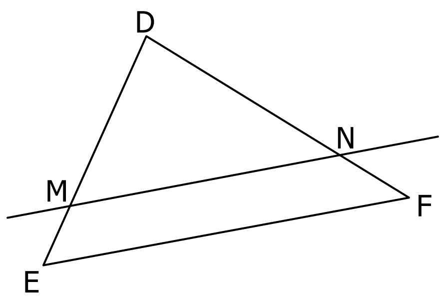


Remarque :

Le second théorème des milieux n'est qu'un cas particulier de ce théorème, pour $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$

Exemple :

On considère le triangle DEF tel que DE = 4 cm, DF= 5 cm, EF = 6 cm.
M est le point de [DE] tel que DM = 3cm.
La parallèle à (EF) passant par M coupe [DF] en N.
Calculer DN.



Dans le triangle DEF,
On sait que :

- $M\in[DE]$,
- $N\in[DF]$,
- (MN) // (EF),

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DM}{DE}=\frac{DN}{DF}=\frac{MN}{EF},$$

soit :

$$\frac{3}{4}=\frac{DN}{5}=\frac{MN}{6},$$

Produit en croix :

$$DN \times 4 = 5 \times 3$$

d'où :

$$DN \times 4 \times \frac{1}{4} = 15 \times \frac{1}{4}$$

donc :

$$DN = \frac{15}{4} = 3,75\,\text{cm}$$

IV. AGRANDISSEMENT ET REDUCTION :

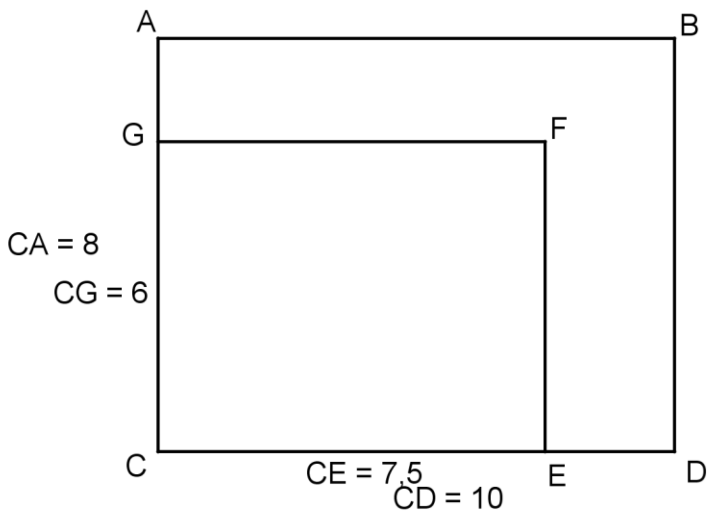
Définition :
Si l'on multiplie par un nombre k supérieur à 1 toutes les longueurs d'une figure F, on obtient une figure F' qui est un **agrandissement** de la figure F.
Le nombre k est appelé le **facteur d'agrandissement**.

Si ce nombre k est compris entre 0 et 1, on obtient une **réduction** de la figure F.
Le nombre k est appelé le **facteur de réduction**.

Il y a proportionnalité entre les longueurs correspondantes des deux figures.

Propriété :
Dans un agrandissement ou une réduction d'une figure :
- les mesures d'angles sont conservées,
- le parallélisme est conservé.

Exemple :



$$\frac{CE}{CD} = \frac{7,5}{10} = 0,75 \quad \text{et} \quad \frac{CG}{CA} = \frac{6}{8} = 0,75$$

Cas particulier pour le triangle :
La configuration de Thalès abordée traduit une situation d'agrandissement/ réduction d'un triangle.
Ainsi :

$$\mathbf{k} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$